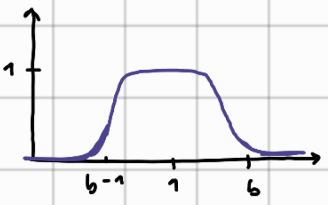
# ÉNONCÉ

CONVENTION T.Fourier : $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt$

1 Lemme de Freud.

CADRE : ▸ $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} v(1) = 1 \\ \operatorname{Supp}(v) \subset [b^{-1}, b] \end{cases}$




↳ $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ : $\exists u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $v = \hat{u}$.

▸ $c_k(f,t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, u(b^k(s-t))\, ds$. $f \in C(\mathbb{R})$ BORNÉE $t \in \mathbb{R}$.

↳ $f$ dérivable en $t \Rightarrow b^k c_k(f,t) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

2 soit $W : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k x)$ $0 < a < 1$, $b > 1$. tq $ab \geq 1$

$W$ est CONTINUE, NULLE PART DÉRIV sur $\mathbb{R}$.

# LEÇONS.

228

241

250

# RÉFS

- Willem - Analyse harmonique p. 130.

⚠ Convention différente pour la transfo. de Fourier.

# RÉSULTATS ASSOCIÉS.

1. $\partial^\alpha \hat{u} = i^\alpha \widehat{\partial^\alpha u}$
2. existence de fonctions plateau

voir El Amrani analyse de Fourier dans les espaces fonct.

3. bijectivité de de la transfo de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

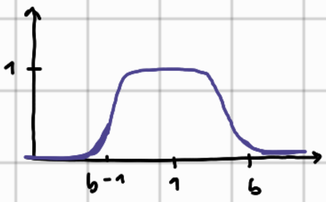
# DÉMO.

: à l'oral.

écrit au tableau.

: pour comprendre.

**CADRE** : $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\begin{cases} v(1) = 1 \\ \mathrm{supp}(v) \subset [b^{-1}, b] \end{cases}$




Fonction plateau : ∃ fins.

$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ $v \in S(\mathbb{R})$ : $\exists u \in S(\mathbb{R})$ tq $v = \hat{u}$. TF bijective de $S(\mathbb{R})$ ds $S(\mathbb{R})$

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$, dérivable en $t \in \mathbb{R}$.

Posons : $C_k(f,t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, u(b^k(s-t))\, ds$, $k \in \mathbb{N}$.

1. trad hyp dériv en t de f :

$\forall s \in \mathbb{R}$, $f(s) = f(t) + f'(t)(s-t) + R(s-t)$ avec $\frac{R(s-t)}{s-t} \xrightarrow[s \to t]{} 0$. (Taylor)

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$C_k(f,t) = f(t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(b^k(s-t))\, ds}_{I_1} + f'(t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (s-t)\, u(b^k(s-t))\, ds}_{I_2} + \underbrace{\int R(s-t)\, u(b^k(s-t))\, ds}_{I_3}.$$

Étudions chacune des parties.

Mq $I_1 = I_2 = 0$.

(*) CV : $\begin{cases} x = b^k(s-t) \\ dx = b^k ds \end{cases}$

$I_1$ : $I_1 = b^{-k} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dx \underset{\text{déf } \hat{u}}{=} b^{-k}\, \hat{u}(0) \underset{\text{déf } v}{=} b^{-k} v(0) \underset{\text{nulle hors } [b^{-1}, b]}{=} 0$.

$I_2$ : $I_2 = b^{-2k} \int_{\mathbb{R}} x u(x)\, dx \underset{\text{déf } \wedge}{=} b^{-2k}\, \widehat{xu(x)}(0) = -\frac{1}{i} \hat{u}'(0) = i v(0) = 0$.

Reco dérivée à x −i près.

$\widehat{\frac{-ixu(x)}{-i}} = \frac{-1}{i} \hat{u}'(x)$

Majoration de $I_3$.

$I_3$ : On se rappelle que $R(s-t) = o(s-t)$.

· soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que $\forall |s-t| < \delta$, $R(s-t) < \varepsilon |s-t|$

On va majorer $I_3$

On commence par majo R :

$|R(s-t)| = |f(s) - f(t) - f'(t)(t-s)| \leq \underbrace{2\|f\|_\infty}_{<+\infty \text{ car } f \text{ bornée.}} + |f'(t)|\,|t-s|$ (*)

on coupe l'intégrale en 2 :

Pour ctrl ça, comme on a plus qu'un potentiel problème en $+\infty$, (localement intégrable) on va comparer avec une intégrale de Reimann CV au voisinage de $+\infty$ donc faire apparaître un carré au dénominateur. Comme $R$ croît linéairement, on va $\times$ et $\div$ par une puissance 3.

par ce qui préc.

$$|I_3| \leq \varepsilon \underbrace{\left|\int_{|s-t|\leq\delta} |s-t|\,|u(b^k(s-t))|\,ds\right|}_{\text{ça on va pv le ctrl}} + \left|\int_{|s-t|>\delta} \frac{R(s-t)\,u(b^k(s-t))}{b^{3k}(s-t)}\left(b^{3k}(s-t)\right) ds\right|$$

$$\leq \varepsilon\, b^{-2k} \underbrace{\|x u(x)\|_1}_{<+\infty} + b^{-3k} \underbrace{\underbrace{\|x^3 u(x)\|_\infty}_{<+\infty} \overbrace{\int_{|s-t|>\delta} \frac{|R(s-t)|}{|b^3(s-t)|}\,ds}^{<+\infty}}_{=:C} \quad \text{avec CV } (*)$$

comme expliqué préc.

car $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $H$ nul plus aussi et $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

__Finalement__ : $|b^{2k} C_k(f,t)| \leq \varepsilon \|x u(x)\|_1 + b^{-2k} C_{\delta,t}$.

Donc $\limsup_k |b^{2k} C_k(f,t)| \leq \varepsilon \|x u(x)\|_1$

D'où la CV car $\varepsilon$ qqconque.

**2.** On démontre par contraposée :

Notons $f(s) = 2W(s) = 2\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k s)$ $\quad 0<a<1 \quad ab>1 \quad b>1$.

$\sum a^k \cos(b^k x)$ CVN sur $\mathbb{R}$ donc $f$ conti.

CVN car $|a^k \cos(b^k s)| \leq |a|^k$ et $|a|<1$. Série géom.

Soit $j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$

écrire cos ĉ exp

$$C_j(f,t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k\, u(b^j(s-t)) \left(e^{ib^k s} + e^{-ib^k s}\right) ds.$$

CV : $\begin{cases} x = b^j(s-t) & s = b^{-j}x + t \\ ds = b^{-j}dx. \end{cases}$

$$C_j(f,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k b^{-j} \left( e^{ib^k t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x) e^{ib^{k-j}x}\,dx}_{\hat{u}(-b^{k-j}) = 0} + e^{-ib^k t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ib^{k-j}x}\,dx}_{\hat{u}(b^{k-j}) = \delta_{kj}} \right)$$

là où on peut interv $\Sigma$ et $\int$ par th Fubini.

car en majo les exp par 2, $\sum^{\infty} a^k$ = const par rapport à $s$.

et $\int_{\mathbb{R}} |u|$ CV car $u \in \mathcal{S} \subset L^1$

car $k-j>0$ ça dépasse $b$

$k-j<0$ ça dépasse $-b$

$k=j$ : $=1$ et $v(1)=1$.

reste que terme en $j$

$$= a^j b^{-j} e^{-ib^j t}$$

$|b^{2j} C_j(f,t)| = (ab)^j \underset{j\to+\infty}{\not\longrightarrow} +\infty$ car $ab>1$. Par contraposée $f$ non dériv. en $t$.